Übungen

Abgabetermin: Freitag 23.4. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: Mengensysteme, Maße und Maßerweiterungssatz

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Beweisen Sie Folgerung 2.2 aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 3.8 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfolge in Ω. Dann heißt die Menge

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \qquad \textbf{Limes superior}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j \qquad \textbf{Limes inferior}$$

der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

a) $\limsup_{n\to\infty} A_n$ ist die Menge aller Elemente, die in unendlichen vielen A_n enthalten sind.

b) $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ist die Menge aller Elemente, die in allen bis auf endlichen vielen A_n enthalten sind.

c) Monotone Mengenfolgen konvergieren.
Eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** mit Limes $\lim_{n\to\infty} A_n$, wenn die Gleichheit $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ gilt.

d) Für konvergente Mengenfolgen gilt $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Für $\Omega = \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_0 := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$. Die Mengenfunktionen $\mu_1 : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ und $\mu_2 : \mathcal{A}_0 \to [0, 1]$ seien gegeben durch

$$\mu_1(A) := |A| \qquad \text{und} \qquad \mu_2(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ endlich} \end{cases}.$$

a) Wie sieht die von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}$ aus?

b) Lässt sich μ_1 zu einem Maß auf $\mathfrak{A}$ fortsetzen?

c) Lässt sich μ_2 zu einem Maß auf $\mathfrak{A}$ fortsetzen?

Die folgenden Aufgaben werden in der ersten Übungsstunde besprochen:

Aufgabe I
Es seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$.

a) Bestimmen Sie die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{M})$.

b) Bestimmen Sie das von $\mathcal{M}$ erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{M})$.

c) Geben Sie zwei verschiedene W-Maße P_1 und P_2 auf $\sigma(\mathcal{M})$ an, die auf $\mathcal{M}$ übereinstimmen.

Aufgabe II
Es sei P ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit

$$P((-\infty, t]) = P([-t, \infty)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Außerdem definieren wir für alle $B \subset \mathbb{R}$ die Menge $-B := \{-b \mid b \in B\}$. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathfrak{B}$ bereits $P(A) = P(-A)$ gilt.

Aufgabe III
Beweisen Sie Satz 2.3 aus der Vorlesung.